Задача: В правильной треугольной призме ABCA1B1C1 сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA1 равно sqrt\_2. На ребрах AB, A1B1 и B1C1 отмечены точки M, N и K соответственно, причем AM=B1N=C1K=1.

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что MNKL – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

Учитель: Добрый день. Сейчас мы с вами будем решать стереометрическую задачу из ЕГЭ по профильной математике. Прочитайте внимательно условие. С чего начнем работу с задачей.

Ученики: нужно составить рисунок.

Учитель: как стоит расположить призму в пространстве?

Ученик 1: Удобно будет, если мы будем видеть секущую плоскость как бы «спереди». Поэтому можно сделать такой рисунок (Рис. 1). *\*Этот ученик идёт к доске и делает рисунок\**

Рис. 1

Ученик 2: Нам даны три точки плоскости, можем построить сечение.

Ученик 3: Да, во-первых, проведем отрезки KN и NM. Плоскость пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым. Поэтому можно в грани ABC провести прямую через точку M параллельную KN.

Учитель: Эта прямая будет пересекать ещё какую-нибудь сторону нижнего основания?

Ученик 3: Да, пусть она пересекает BC в точке P. \*Ошибка в расположении прямой\* (Рис. 2)

Рис. 2

Учитель: А как относительно друг друга располагаются прямые MP и NK?

Ученик 2: Они должны быть параллельны.

Ученик 1: Тогда треугольники MPB и NKB1 подобны.

Ученик 3: Да, и длина отрезка MB в два раза больше длины NB1.

Ученик 2: Длина BP в два раза больше длины B1K, то есть BP=4.

Ученик 1: Но ведь BC=4.

Учитель: Какое тогда предположение оказалось неверным?

Ученик 2: Точка P должна принадлежать ребру AC, чтобы MP была параллельна NK.

Ученик 3: Тогда для соответствия условию задачи, её следует назвать точкой L (Рис. 3).

Рис. 3

Учитель: А что необходимо, чтобы ответить на первый вопрос задачи?

Ученик 1: Четырехугольник MNKL у нас построен. Чтобы доказать, что он квадрат, можно найти его стороны.

Ученик 3: Так как ML параллельна NK, и AM=NB1, то треугольники AML и B1NK равны.

Ученик 1: Тогда по теореме косинусов следует, что NK=ML=sqrt\_3.

Ученик 2: А ещё, по теореме обратной теореме Пифагора, эти треугольники прямоугольные.

Учитель: Вы доказали, что MNKL является чем?

Ученик 3: Если две стороны равны и параллельны, то это параллелограмм.

Учитель: А как найти длины других сторон?

Ученик 2: MN – сторона прямоугольной трапеции в боковой грани, поэтому, опустив высоту MH из точки M на A1N, получим прямоугольный треугольник MHN.

Ученик 1: Тогда, по теореме Пифагора, MN=sqrt\_3, а значит и LK=sqrt\_3.

Ученик 3: То есть, мы доказали, что MNKL – ромб, осталось доказать, что все его углы прямые.

Учитель: Как же это лучше сделать?

Ученик 2: Можно найти диагонали ромба. Если они равны, то это квадрат.

Ученик 1: В этой задаче хорошо работает теорема Пифагора. Можно провести через точки N и K перпендикуляры к плоскости нижнего основания, пусть это будут NF и KS.

Ученик 3: Тогда треугольники LAF и MBS равные, равносторонние треугольники. Значит, FL=MQ=2.

Ученик 2: И снова, по теореме Пифагора, NL=KM=sqrt\_6. Значит, Диагонали ромба равны, то есть, MNKL – квадрат. Что и требовалось доказать.

Учитель: Обязательно ли было находить длину отрезков NL и KM?

Ученик 1: Нет, по двум катетам, треугольники MSK и LFN равны, следовательно, NL и KM равны. И опять же, MNKL – квадрат.

Учитель: Теперь переходим ко второму пункту. Что необходимо сделать первым делом?

Ученик 3: Нам нужно найти площадь площадь сечения, а сечение у нас квадрат, тогда его площадь равна 3.

Ученик 2: Но MNKL – это не полное сечение. Нужно ещё получить точку на ребре CC1. Для этого воспользуемся методом следов. Пусть FL пересекает BC в точке P, и пусть PK пересекает CC1 в точке E. \*Ученики научились сами искать противоречия в своих рассуждениях и вести диалог\* (Рис. 4)

Рис. 4

Ученик 3: Правда. Тогда, чтобы найти площадь сечения, можно найти отдельно площадь квадрата MNKL и треугольника KEL, сумма этих площадей и будет искомой.

Ученик 1: Площадь квадрата мы уже знаем, как найти площадь треугольника KEL? \*Ученики сами задают друг другу вопросы в процессе рассуждения\*

Ученик 2: Можем, по теореме Пифагора, найти KE и EL. А потом, например, по формуле Герона найти площадь треугольника.

Учитель: От чего зависят длины этих отрезков?

Ученик 1: От положения точки E. Рассмотрим треугольники EC1K и ECP, они равны по катету и острому углу. Тогда отрезки C1E и EC равны, то есть точка E – середина ребра CC1. C1E=EC=sqrt\_2/2.

Ученик 2: Тогда в треугольнике LEK длины сторон такие: sqrt\_3, sqrt\_3/2, sqrt\_3/2. А они образуют пифагорову тройку. Тогда можно найти площадь этого треугольника как полупроизведение катетов. Значит, площадь треугольника LEK равна ¾.

Ученик 3: И следовательно, общая площадь сечения равна 3 ¾ .

Учитель: Как ещё вы предлагали найти площадь треугольника LEK?

Ученик 1: Предлагали найти с помощью формулы Герона, но в этом треугольнике длины сторон выражаются через квадратные корни, считать полупериметры было бы не удобно. Не каждый путь решения удобен для конкретных задач.

Учитель: Замечательно. Мы с Вами полностью решили задачу из экзамена.